Поговорим про устойчивость!

Теорема, которая будет вам доказываться: Система линейных ОДУ с постоянными коэфами устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех собственных значений матрицы коэфов отрицательны.
В этой методичке я расскажу, почему именно так.

Везде мы будем рассматривать ОДУ и системы ОДУ только ЛИНЕЙНЫЕ и с постоянными коэфами.

Итак,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ay \\ y|_{t=0} = y_0 \end{cases}$$

Его решение вы выписываете мгновенно:

$$y(t) = y_0 e^{at}$$

Предположим, Вася Пупкин - экспериментатор, кто вам дал начальное условие y_0, чуть ошибся – на Δy. Тогда ошибка будет Δy*e^{at}.
Если a>0, то экспонента будет расти и ваша ошибка будет накапливаться. Причём… ох ё… очень быстро! Экспоненциально быстро!!! Катастрофа, мы все умрём!

Если a<0, то экспонента будет убывать и ваша ошибка будет убывать. По кайфу!

Запомним: a>0 – всё плохо (неустойчивость), a<0 – всё хорошо (устойчивость).

Теперь рассмотрим систему ОДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dt} = \hat{A}\vec{y} \\ y|_{t=0} = y_0 \end{cases}$$

Запишем решение $\frac{d\vec{y}}{dt} = \hat{A}\vec{y}$ в векторном виде:

$$\vec{y}(t) = C_1\overrightarrow{\varphi_1}e^{\lambda_1 t} + C_2\overrightarrow{\varphi_2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n\overrightarrow{\varphi_n}e^{\lambda_n t}$$

Константы $C_1 \dots C_n$ определяются из начальных условий.
$\lambda_1 \dots \lambda_n$ – собственные значения (СЗ) матрицы коэфов $\hat{A}$.
$\overrightarrow{\varphi_1} \dots \overrightarrow{\varphi_n}$ – собственные векторы.

Что будет? Предположим, Вася Пупкин – экспериментатор, ошибся так, что вам пришлось исправить лишь C_2. Тогда ваша судьба зависит от λ_2. Если она окажется <0 – вы спасены, решение окажется устойчивым. А вот если больше – усё, новое решение будет

$$\vec{y}(t) = C_1\overrightarrow{\varphi_1}e^{\lambda_1 t} + (C_2 + \Delta C_2)\overrightarrow{\varphi_2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n\overrightarrow{\varphi_n}e^{\lambda_n t}$$

И разница $\Delta C_2 e^{\lambda_2 t}$ будет нарастать.

Именно поэтому для систем требуется уже, чтобы ВСЕ СЗ матрицы $\hat{A}$<0. Только тогда вы застрахованы от ошибок Васи. Это не значит, что если у вас часть СЗ <0, а часть >0, то при смещении начальных данных вы получите неустойчивость. Может повезти, может не повезти – смотря как менять начальные условия. Ну, например, если

$$\vec{y}(t) = C_1\overrightarrow{\varphi_1}e^{\lambda_1 t} + C_2\overrightarrow{\varphi_2}e^{\lambda_2 t}$$
$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$

То если начальная ошибка будет коллинеарна (пропорциальна) вектору $\overrightarrow{\varphi_1}$, то ошибка будет угасать, а если $\overrightarrow{\varphi_2}$ – нарастать.

Осталось разобраться с одной оговоркой: в условии требуется не просто отрицательность всех лямбд, а отрицательная часть действительной части.

Дело в том, что лямбды могут быть ещё комплексными. Мнимая часть будет вызывать колебания.
Например, решение $y(t) = Ce^{(a+bi)t} = Ce^{at}e^{bit}$ дополнительно ещё будет синусоидально колебаться. Понятно, что влияние на асимптотику будет ноль – всё равно всё решает а. Но раз СЗ могут быть комплексными, то в условии теоремы и говорится про отрицательность именно действительной части.